Sitzungsber. Abt. II (2000) 209: 3–18

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Kopunktalitätsprobleme bei Dreiecken

Von

O. Giering

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 6. April 2000
durch das k. M. Oswald Giering)

1. Problemstellung, Ergebnisse, Folgerungen

Fällt man in der euklidischen Ebene von einem Punkt X die Lote auf die Seiten AB, BC, CA eines Dreiecks ABC, so entsteht die Frage nach der Kollinearität der Lotfußpunkte $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ (Abb. 1). Der Satz von Wallace[1], einer der klassischen Sätze der euklidischen Dreiecksgeometrie, löst dieses *Kollinearitätsproblem* und besagt: Die Lotfußpunkte P, Q, R liegen genau dann auf einer Geraden – der euklidischen Wallace-Geraden[2] des Punktes X zum Dreieck ABC – wenn X auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt. Der Satz von Wallace und sein Umfeld wurden vielfach untersucht, so in den Arbeiten [6] und [7].

Als Beitrag zu diesem Problemkreis werden im Folgenden in der projektiv erweiterten euklidischen Ebene zwei *Kopunktalitätsprobleme* betrachtet, in denen zwei *Kubiken* (Kurven 3. Ordnung) eine zentrale Rolle spielen. Die in ihrer analytischen Behandlung auftretenden algebraischen Umformungen sind elementar, teilweise jedoch sehr umfangreich. In diesen Fällen empfiehlt sich der Einsatz eines Computeralgebra-Systems, etwa von MAPLE. Es ist die Absicht,

---

[1]Nach William Wallace 1797, siehe [1], S. 1234; [2], S. 45; [8], S. 855; [10], S. 143.

[2]Dieselbe Gerade tritt in der Literatur auch als Simson-Gerade auf.

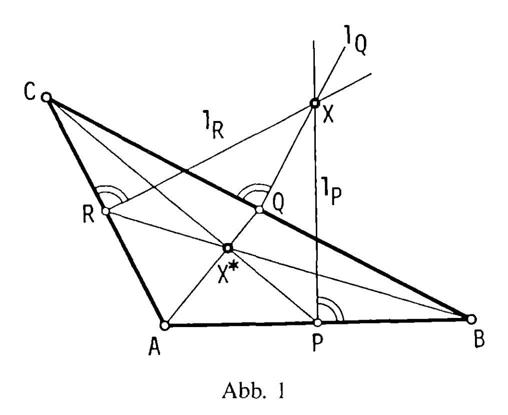


Abb. 1

anhand der beiden Kopunktalitätsprobleme zu zeigen, daß sich der Elementargeometrie mit Hilfe der Computeralgebra und den Werkzeugen Rechner, Bildschirm und Drucker ein weites Feld eröffnet, das die klassische Elementargeometrie, die sich weithin an Zirkel und Lineal orientiert, umfaßt.

Im **1. Problem** (Abb. 1) werden von einem Punkt X die Lote auf die Seiten AB, BC, CA eines Dreiecks ABC gefällt und die Verbindungsgeraden der Lotfußpunkte $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ mit den jeweiligen Gegenecken – die *Fußpunktgeraden* PC, QA, RB des Punktes X zum Dreieck ABC – auf *Kopunktalität* untersucht. Dabei zeigt sich, daß die Fußpunktgeraden PC, QA, RB genau dann in einem Punkt $X^* := PC \cap QA \cap RB$ kopunktal sind, wenn der Punkt X auf einer wohlbestimmten (zum Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC zentralsymmetrischen) **Kubik** k liegt (Satz 1 und Abb. 3).

Im **2. Problem** (Abb. 1) wird umgekehrt ein Punkt X^* aus den Ecken eines Dreiecks ABC auf die Punkte $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ der Gegenseiten projiziert und die *Kopunktalität* der Geraden $l_P \perp AB, l_Q \perp BC, l_R \perp CA$ – der *Seitenlote* des Punktes X^* zum Dreieck ABC – untersucht. Es zeigt sich, daß l_P, l_Q, l_R einander genau dann in einem Punkt $X := l_P \cap l_Q \cap l_R$ schneiden, wenn der Punkt X^* auf einer ebenfalls wohlbestimmten **Kubik** k^* liegt (Satz 2 und Abb. 3).

Die beiden Kopunktalitätsprobleme führen ersichtlich zu einer bijektiven Abbildung $X \mapsto X^*$ der Punkte $X \in k$ auf die Punkte $X^* \in k^*$ Für $X = A, B, C$ existiert nach Konstruktion (Abb. 1) jeweils X^* und es ist $X^* = A, B, C$. Die Kubiken k und k^* enthalten also die Ecken des Dreiecks ABC. Betrachtet man im Dreieck ABC den Schwerpunkt S, den Umkreismittelpunkt M und den Höhenschnittpunkt H, so folgt unmittelbar: Für $X = M$ existiert X^* und es ist

$X^* = S$, für $X = H$ existiert X^* und es ist $X^* = H$. Daher gilt $\{M,H\} \subset k$, $\{S,H\} \subset k^*$ Damit sind in der Abbildung $X \mapsto X^*$ die Punkte *A,B,C,H* selbstentsprechend: $A = A^*, . \quad , H = H^*$

Es ist nun das Hauptanliegen dieser Arbeit, die Kubiken k und k^* zu untersuchen und neben

$$\{A,B,C,M,H\} \subset k \quad \text{und} \quad \{A,B,C,S,H\} \subset k^*$$

weitere (aus dem Dreieck *ABC* abgeleitete) *ausgezeichnete Punkte* sowie *ausgezeichnete Tangenten* der Kubiken k und k^* zu ermitteln.[3] Dazu wird zunächst Abb. 2 betrachtet, die sich ohne Kenntnis der formulierten Kopunktalitätsprobleme entwickeln läßt und dazu dient, die folgenden in 1) bis 9) genannten Punkte einzuführen[4]

1) die **Spiegelpunkte** A', B', C', H' von *A, B, C, H* an *M*,
2) die **Spiegelstreckungspunkte** A^0, B^0, C^0, M^0, die aus *A, B, C, M* durch Spiegelstreckung an *S* mit Streckungsfaktor 2 entstehen[5],
3) die **Höhenfußpunkte** $H_A \in BC, H_B \in CA, H_C \in AB$ des Dreiecks *ABC*,
4) die **Fußpunkte** $A'^* \in BC, B'^* \in CA, C'^* \in AB$ der Höhen des Dreiecks $A'B'C'$ auf den Seiten des Dreiecks *ABC*[6],
5) den **Schnittpunkt** $H'^* := AA'^* \cap BB'^* \cap CC'^*$ (man zeigt mit MAPLE, daß die Geraden AA'^*, BB'^*, CC'^* die Kopunktalitätsbedingung vom Typ der Gleichung (4) erfüllen),
6) die **Schnittpunkte** $\overset{\times}{A} := BC \cap AH', \overset{\times}{B} := CA \cap BH', \overset{\times}{C} := AB \cap CH'$ (die Projektionen der Dreiecksecken *A, B, C* aus H' auf ihre Gegenseiten im Dreieck *ABC*),
7) den **Schnittpunkt** *L* der Seitenlote in $\overset{\times}{A}, \overset{\times}{B}, \overset{\times}{C}$ (man zeigt mit MAPLE, daß die Seitenlote die Kopunktalitätsbedingung vom Typ der Gleichung (4) erfüllen),
8) den **Spiegelpunkt** L' von *L* an *M*,

---

[3]Ein verwandtes Vorgehen findet man beim Neunpunktekreis (Feuerbach-Kreis) eines Dreiecks *ABC*. Siehe [2], S. 25; [4], S. 18.

[4]Im Folgenden markiert ein Index * einen Bildpunkt in der Abbildung $X \mapsto X^*$, ein Index $'$ einen Spiegelpunkt am Umkreismittelpunkt *M* und ein Index ^{0} einen Spiegelstreckungspunkt am Schwerpunkt *S* mit Streckungsfaktor 2.

[5]*H* ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A^0B^0C^0$ und es ist $H = M^0$, $H' = H^0 = (M^0)^0$ Die Punkte H, S, M, H' liegen kollinear auf der Euler-Geraden des Dreiecks *ABC; S* teilt die Strecke $\overline{HM}$ im Verhältnis $\overline{HS} \quad \overline{SM} = 2:1$ und die Strecke $\overline{HH'}$ im Verhältnis $\overline{HS}:\overline{SH'} = 1:2$. Siehe etwa [4], S. 15.

[6]Die Bezeichnung A'^* macht deutlich, daß es sich um den Bildpunkt des Spiegelpunktes A' in der Abildung $X \mapsto X^*$ handelt. Dies folgt elementar aus den Abb. 2 zugrundeliegenden Konstruktionen.

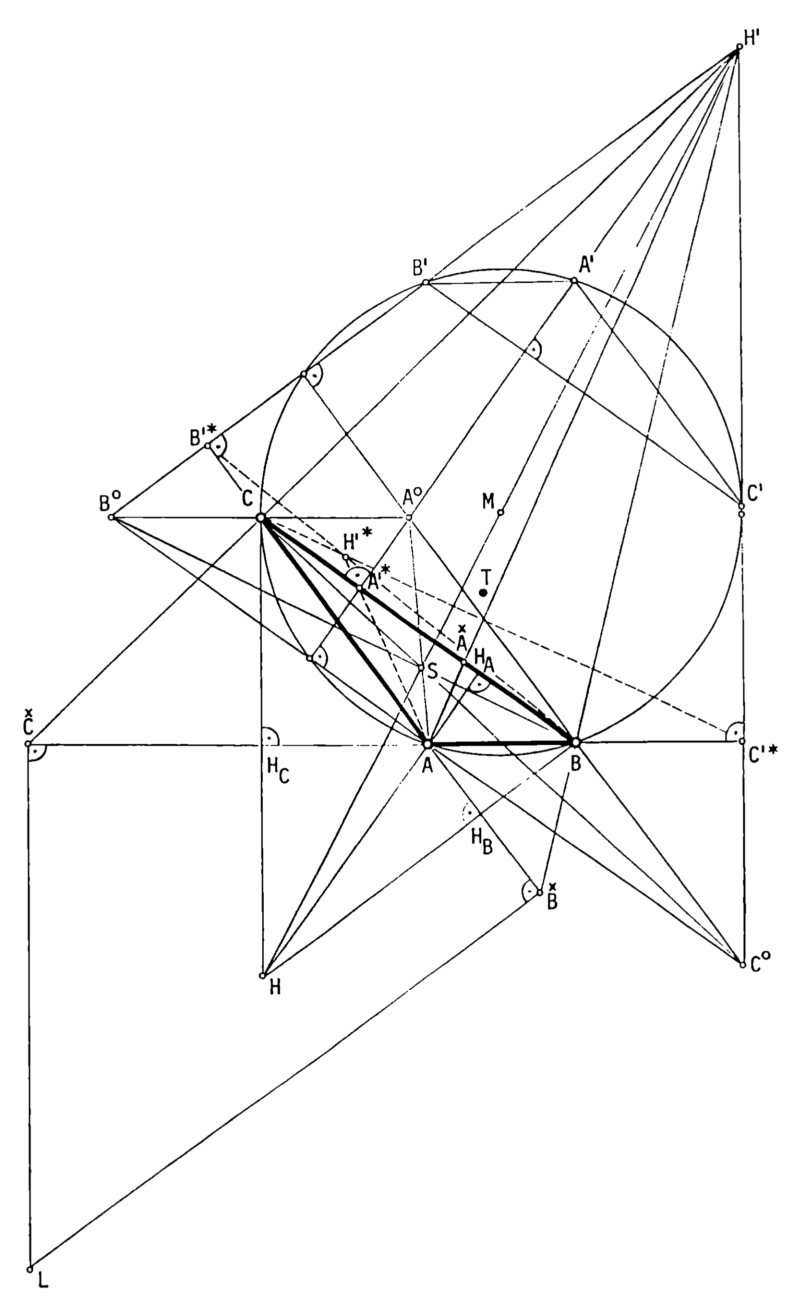


Abb. 2

9) den **Schnittpunkt** $T := \overset{\times}{A}A' \cap \overset{\times}{B}B' \cap \overset{\times}{C}C'$ (man zeigt die Kopunktalität der Geraden $\overset{\times}{A}A', \overset{\times}{B}B', \overset{\times}{C}C'$ zweckmäßig mit MAPLE).

In Abb. 2 verifiziert man unmittelbar die Kollinearität der Punkte der drei Punkte-Quadrupel

$$\{H', A', A^0, A'^*\}, \{H', B', B^0, B'^*\}, \{H', C', C^0, C'^*\}$$

sowie die Streckengleichheiten

$$\overline{H'A'} = \overline{A'A^0}, \quad \overline{H'B'} = \overline{B'B^0}, \quad \overline{H'C'} = \overline{C'C^0}$$

In Abb. 2 ist B der Fußpunkt des Lotes von A' auf AB und C der Fußpunkt des Lotes von A' auf CA. Folglich existiert nach Konstruktion A'^* als Fußpunkt des Lotes von A' auf BC. Entsprechendes gilt bezüglich B' und C':

$$A' \mapsto A'^* \in BC, \quad B' \mapsto B'^* \in CA, \quad C' \mapsto C'^* \in AB.$$

Die auf die Lotfußpunkte A'^*, B'^*, C'^* führenden Konstruktionen ergeben außerdem:

$$\overline{AH_C} = \overline{BC'^*}, \quad \overline{BH_A} = \overline{CA'^*}, \quad \overline{CH_B} = \overline{AB'^*}$$

In Abb. 2 sind nach 5) die Geraden AA'^*, BB'^*, CC'^* kopunktal. Daher existiert $H'^* := AA'^* \cap BB'^* \cap CC'^*$ und es gilt:

$$H' \mapsto H'^* := AA'^* \cap BB'^* \cap CC'^* \quad (\Rightarrow H' \in k, H'^* \in k^*).$$

In Abb. 2 werden nach 6) die Ecken des Dreiecks ABC aus $H' \in k$ auf ihre Gegenseiten in die Punkte $\overset{\times}{A} \in BC$, $\overset{\times}{B} \in CA$, $\overset{\times}{C} \in AB$ projiziert. Beachtet man, daß die Seitenlote in den Punkten $\overset{\times}{A}, \overset{\times}{B}, \overset{\times}{C}$ einander nach 7) in einem Punkt L schneiden, dann gilt:

$$L \mapsto L^* = H' = A\overset{\times}{A} \cap B\overset{\times}{B} \cap C\overset{\times}{C} \quad (\Rightarrow L \in k, L^* = H' \in k^*).$$

Damit sind die *Dreiecksecken A, B, C*, der *Höhenschnittpunkt H* und sein *Spiegelpunkt H'* an *M gemeinsame Punkte der Kubiken k und k**

Nach den bisherigen Überlegungen sowie nach Satz 1 und Satz 2 enthalten die Kubiken k und k^* die folgenden ausgezeichneten (aus dem definierenden Dreieck ABC im Rahmen elementarer Dreiecksgeometrie abgeleiteten) Punkte:

$$\left.\begin{array}{llll} \{A, B, C, H, H', & L, M, T, & A', B', C', & \overset{\times}{A}, \overset{\times}{B}, \overset{\times}{C}\} \subset k \\ \{A, B, C, H, H'^*, & H', S, T^* & A'^*, B'^*, C'^*, & A^0, B^0, C^0\} \subset k^* \end{array}\right\}$$

(I)

Nach Konstruktion von X^* aus X erhält man $\overset{\times}{A}{}^* \in A\overset{\times}{A}$, $\overset{\times}{B}{}^* \in B\overset{\times}{B}$, $\overset{\times}{C}{}^* \in C\overset{\times}{C}$. Dem Punkt $A^0 \in k^*$ entspricht auf k der Fernpunkt des Mittellots von BC (der Fernpunkt der zu BC orthogonalen Asymptote von k); Entsprechendes gilt für die Punkte B^0 und C^0

Weitere Ergebnisse, die aus der analytischen Behandlung der beiden Kopunktalitätsprobleme fließen, finden sich in Satz 1 und Satz 2. Nach Satz 1 ist die Kubik *k für jedes Dreieck ABC* zum Umkreismittelpunkt M zentralsymmetrisch. Weiter zeigen Satz 1 und Satz 2, daß die Kubiken k und k^* unter den Punkten (I) *ausgezeichnete Quadrupel von Punkten* besitzen mit der Eigenschaft, daß sich die *Kubiktangenten in diesen Punkten in einem weiteren Punkt derselben Kubik* schneiden. Man entnimmt daraus, daß k und k^* Kubiken 6. Klasse[7] sind. Mit Hilfe der ersten Plücker-Formeln ([5], S. 88, [9], S. 373) folgt weiter, daß **singularitätenfreie Kubiken vom Geschlecht** 1 vorliegen.

Ausgezeichnete Quadrupel von Kubikpunkten aus (I) – interpretiert als Ecken vollständiger Vierecke – mit der (Schließungs-)Eigenschaft, daß sich die Kubiktangenten in diesen Punkten in einem weiteren Punkt derselben Kubik schneiden, zeigt die linke Hälfte der Tabelle (II). Die sodann von links nach rechts gelesene Tabelle (II) zeigt, daß die ausgezeichneten Punkte (I) Realisierungen des folgenden allgemeinen Satzes Σ über singularitätenfreie Kubiken c (von 6. Klasse) ermöglichen (siehe [3], S. 245).

Satz Σ: *Die vier Berührpunkte ($\neq P$) der von einem Punkt $P \in c$ ausgehenden Tangenten von c sind die Ecken eines vollständigen*

Quadrupel von Kubikpunkten: Ecken eines vollständigen Vierecks V	mit kopunktalen Kubiktangenten in P	mit Satz Σ folgt	Quadrupel aus P und Diagonalpunkten von V	mit kopunktalen Kubiktangenten in Q
$\{A,B,C,H'\} \subset k$	$P = L' \in k$	$\Rightarrow$	$\{\overset{\times}{A},\overset{\times}{B},\overset{\times}{C},L'\} \subset k$	$Q = \overset{\times}{H} \in k$
$\{A',B',C',H\} \subset k$	$P = L \in k$	$\Rightarrow$	$\{\overset{\times}{A}{}',\overset{\times}{B}{}',\overset{\times}{C}{}',L\} \subset k$	$Q = \overset{\times}{H}{}' \in k$
$\{A,B,C,H'^*\} \subset k^*$	$P = H \in k^*$	$\Rightarrow$	$\{A'^*,B'^*,C'^*,H\} \subset k^*$	$Q = T^* \in k^*$
$\{A^0,B^0,C^0,S\} \subset k^*$	$P = H'^* \in k^*$	$\Rightarrow$	$\{A,B,C,H'^*\} \subset k^*$	$Q = H \in k^*$

(II)

[7]Die Klasse einer Kubik gibt an, wieviele Tangenten die Kubik durch einen beliebigen Testpunkt schickt. In Abb. 3 erkennt man, daß durch die Punkte H und H'^* der Kubik k^* jeweils 4 Kubiktangenten hindurchgehen, die anderswo (in A, B, C, H'^* bzw. in A^0, B^0, C^0, S) berühren, sowie die (doppelt zählende) Kubiktangente in H bzw. H'^*

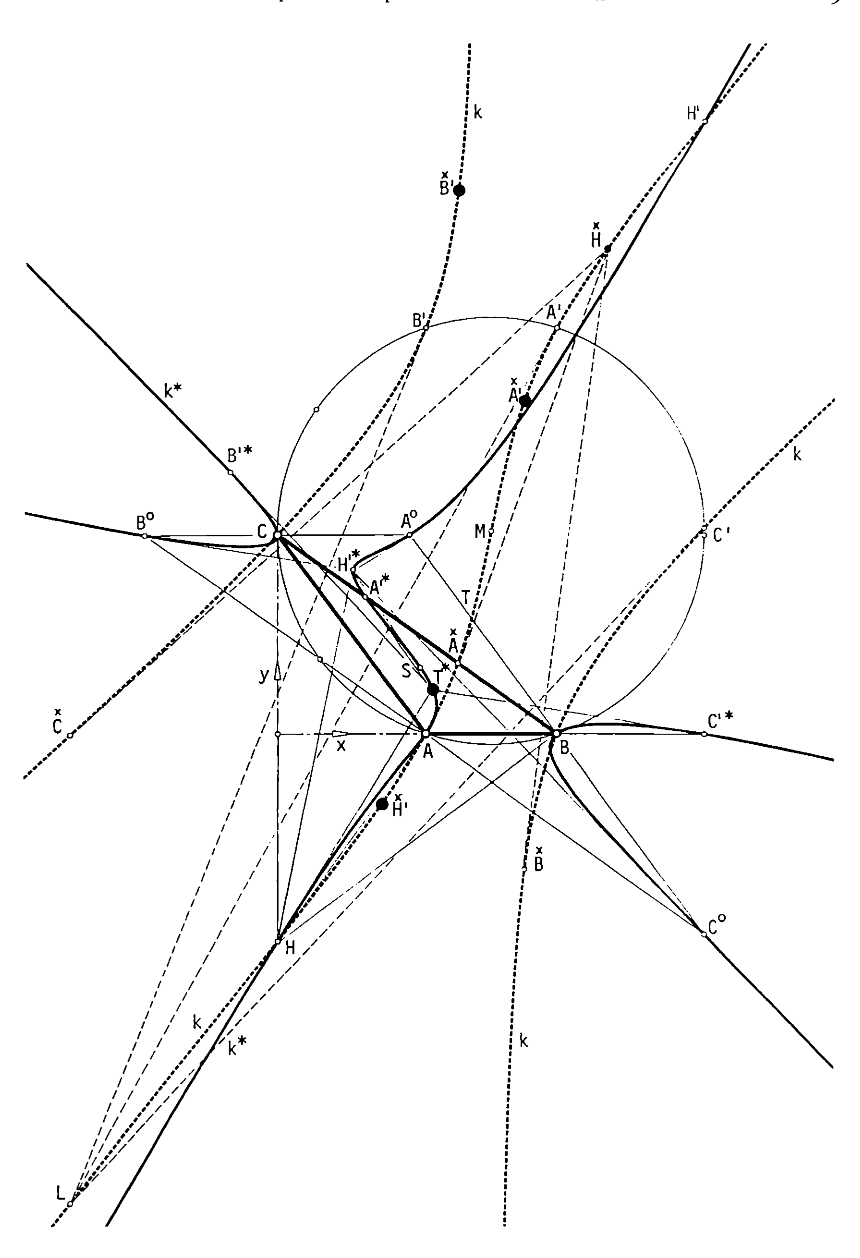


Abb. 3

Vierecks, dessen drei Diagonalpunkte ebenfalls Punkte von c sind; die Tangenten von c in den Diagonalpunkten sowie die Tangente von c in P sind kopunktal in einem Punkt $Q \in c$.

Bei $\overset{\times}{A}, \overset{\times}{B}, \overset{\times}{C}$ handelt es sich nach Satz 1, (d) um die von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte der Kubik k und bei A'^{*}, B'^{*}, C'^{*} um die von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte der Kubik k^* mit den Seiten des Dreiecks ABC.

In der letzten Spalte von (II) erweist sich der durch Satz Σ garantierte Punkt $Q \in k^*$ als der Punkt T^* bzw. als der Höhenschnittpunkt H! Der Satz Σ läßt sich auf die rechte Hälfte von (II) erneut anwenden.

2. Analytische Behandlung

Zur analytischen Behandlung beziehen wir das Dreieck ABC auf das in Abb. 3 verwendete kartesische xy- bzw. $\xi\eta$- bzw. $\xi^*\eta^*$-Koordinatensystem und geben den Ecken A, B, C die Koordinaten $A(a, 0)$, $B(b, 0), C(0, c)$. Ohne Einschränkung ist $a < b, 0 < c$. Die Koordinaten der Punkte X und X^* seien $X(\xi, \eta), X^*(\xi^*, \eta^*)$. Die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H, des Umkreismittelpunkts M und des Schwerpunkts S lauten dann:

$$H\left(0, -\frac{ab}{c}\right), \quad M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right), \quad S\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right). \tag{1}$$

1. Problem: Ausgehend von einem beliebigen Punkt $X(\xi, \eta)$ ergeben sich als Koordinaten der Lotfußpunkte P, Q, R (Abb. 1):

$$\left.\begin{array}{llll} P(x_P, y_P) & \text{mit} & x_P = \xi, & y_P = 0, \\ Q(x_Q, y_Q) & \text{mit} & x_Q = \dfrac{c^2 + b\xi - c\eta}{b^2 + c^2} \cdot b, & y_Q = \dfrac{b^2 - b\xi + c\eta}{b^2 + c^2} \cdot c, \\ R(x_R, y_R) & \text{mit} & x_R = \dfrac{c^2 + a\xi - c\eta}{a^2 + c^2} \cdot a, & y_R = \dfrac{a^2 - a\xi + c\eta}{a^2 + c^2} \quad c. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Der Kalkül ist so eingerichtet, daß die Koordinaten x_Q, x_R sowie y_Q, y_R durch Vertauschung von a und b auseinander entstehen. Unter Verwendung von (2) erhalten die Geraden PC, QA, RB die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} PC & cx + \xi y - \xi c = 0, \\ QA & y_Q x + (a - x_Q)y - y_Q a = 0, \\ RB & y_R x + (b - x_R)y - y_R b = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Die Geraden (3) sind genau dann *kopunktal*, wenn das von PC und QA aufgespannte Geradenbüschel die Gerade RB enthält und folglich die Koeffizienten ihrer Gleichungen die daraus resultierende *Kopunktalitätsbedingung* erfüllen:

$$\begin{vmatrix} c & \xi & c\xi \\ y_Q & a - x_Q & ay_Q \\ y_R & b - x_R & by_R \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Aus (4) folgt nach Entwicklung der Determinante unter Beachtung von (2) die in a und b symmetrische Gleichung

$$\begin{aligned} &2\xi(a\xi - c\eta)(b\xi - c\eta) + (a+b)(c^2 - 2ab)\xi^2 \\ &\quad + 2c(a^2 + ab + b^2 - c^2)\xi\eta - (a+b)c^2\eta^2 \\ &\quad + (ab - c^2)(2ab\xi - (a+b)c\eta) - c^2(a^2 + b^2)\xi \\ &\quad + ab(a+b)c^2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Damit liegt ein Punkt $X(\xi, \eta)$, der auf kopunktale Fußpunktgeraden PC, QA, RB führt, notwendig auf der durch (5) gegebenen *Kubik* k. Ausgehend von (5) läßt sich die Gleichung (4) zurückgewinnen. Daher führt umgekehrt jeder Punkt der Kubik (5) auf kopunktale Fußpunktgeraden PC, QA, RB. Wird (5) nach Potenzen von η geordnet, so stellt sich mit

$$\Lambda := a + b, \quad \Gamma := ab \tag{6}$$

für die Kubik k die in η quadratische Gleichung ein:

$$\begin{aligned} &\{2\xi - \Lambda\}c^2\eta^2 - \{2\Lambda\xi^2 - 2(\Lambda^2 - \Gamma - c^2)\xi + \Lambda(\Gamma - c^2)\}c\eta \\ &\quad + \{2\Gamma\xi^3 + \Lambda(c^2 - 2\Gamma)\xi^2 + (2\Gamma^2 - \Lambda^2 c^2)\xi + \Gamma\Lambda c^2\} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichung (7) (in der Λ und Γ nach (6) invariant sind gegen Vertauschung von a und b) läßt sich vorteilhaft zur programmgesteuerten Erzeugung der Kubik k einsetzen.

Wir fassen das erzielte Ergebnis in Satz 1, (a) zusammen und formulieren in Satz 1, (b)–(d) Eigenschaften der Kubik k, die sich in elementarer Weise aus (5) oder (7) oder der homogenen Schreibweise dieser Gleichungen gewinnen lassen.

Satz 1: *Fällt man in der projektiv erweiterten euklidischen Ebene von einem eigentlichen Punkt $X(\xi, \eta)$ die Lote auf die Seiten eines Dreiecks ABC und sind $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ die Lotfußpunkte, so gilt (Abb. 2,3)*:

(a) *Die Fußpunktgeraden PC, QA, RB sind genau dann kopunktal und schneiden einander in einem Punkt* X^*, *wenn X auf der Kubik k mit der Gleichung* (7) *liegt.*

(b) *Die Kubik k ist zentralsymmetrisch zu M; M ist ein Wendepunkt von k. Die Kubik k besitzt die Mittellote des Dreiecks ABC als Asymptoten.*

(c) *Die (zu M zentralsymmetrische) Kubik k geht durch die Spiegelpunkte* A', B', C', H' *von A, B, C, H an M. Die Dreiecke ABC und* $A'B'C'$ *besitzen denselben Umkreismittelpunkt M, entsprechende Seiten sind parallel:* $AB \| A'B'$, $BC \| B'C'$, $CA \| C'A'$

Die Tangenten von k in A', B', C', H *schneiden einander im Schnittpunkt L der Seitenlote in* $\overset{\times}{A}, \overset{\times}{B}, \overset{\times}{C}$ *(siehe* (7)). *Die Tangenten von k in A, B, C,* H' *schneiden einander (wegen der Zentralsymmetrie von k zu M) in* $L' \in k$ *(siehe Tabelle* (II)).

(d) *Die Kubik k schneidet jede Seite des Dreiecks ABC in den Dreiecksecken (nach* (I)) *sowie in den Punkten*

$$\overset{\times}{A} = BC \cap AH' \qquad \overset{\times}{B} = CA \cap BH' \qquad \overset{\times}{C} = AB \cap CH'$$

Beweisskizzen: Um die in Satz 1 als Punkte der Kubik k genannten Punkte als solche nachzuweisen, berechnet man ihre Koordinaten und zeigt, daß sie (5) oder (7) erfüllen oder man führt den Nachweis elementargeometrisch (etwa unter Verwendung von Symmetrieeigenschaften). Die Zentralsymmetrie der Kubik k entnimmt man bequem der aus (7) entstehenden Kubikgleichung, wenn man die Translation

$$\xi = \bar{x} + \frac{\Lambda}{2}, \quad \eta = \bar{y} + \frac{\Gamma + c^2}{2c} \tag{8}$$

ausübt, die den Ursprung in den Umkreismittelpunkt M verlegt. Wegen der Zentralsymmetrie von k zu M liegt mit jedem Punkt N auch N' auf k.

Zur Bereitstellung der Gleichungen der betrachteten Kubiktangenten verwendet man zweckmäßig die Ableitung $\eta'(\xi)$ aus der nach ξ differenzierten Kubikgleichung (7):

$$\eta'(\xi) = \frac{\begin{array}{c}-2c^2\eta^2 + 2c[2\Lambda\xi - (\Lambda^2 - \Gamma - c^2)]\eta \\ -6\Gamma\xi^2 - 2\Lambda(c^2 - 2\Gamma)\xi - 2\Gamma^2 + \Lambda^2 c^2\end{array}}{2c^2[2\xi - \Lambda]\eta - c[2\Lambda\xi^2 - 2(\Lambda^2 - \Gamma - c^2)\xi + \Lambda(\Gamma - c^2)]} \tag{9}$$

Zum Nachweis der Kopunktalität von Kubiktangenten kann man die jeweils (4) entsprechende Bedingung verwenden und mit MAPLE als erfüllt nachweisen. Für die in Satz 1 auftretenden Punkte H', L, L' berechnet man die Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} &H'\left(\Lambda, \frac{2\Gamma + c^2}{c}\right), L\left(-\frac{\Lambda}{2\Gamma}\ c^2, -\frac{c^2(c^2+2\Gamma)(\Lambda^2-2\Gamma)+2\Gamma^3}{2\Gamma c(c^2+\Gamma)}\right), \\ &\qquad L'\left(\frac{\Lambda(c^2+2\Gamma)}{2\Gamma}, \frac{\Lambda^2 c^2(c^2+2\Gamma)+4\Gamma^3}{2\Gamma c(c^2+\Gamma)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Als Koordinaten der Kubikpunkte $\overset{\times}{A}, \overset{\times}{B}, \overset{\times}{C}$ findet man:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\times}{A}\left(\frac{\Lambda c^2+2\Gamma a}{2(\Gamma+c^2)}, -\frac{c}{b}\cdot\frac{\Lambda c^2+2\Gamma a}{2(\Gamma+c^2)}+c\right), \\ &\overset{\times}{B}\left(\frac{\Lambda c^2+2\Gamma b}{2(\Gamma+c^2)}, -\frac{c}{a}\ \frac{\Lambda c^2+2\Gamma b}{2(\Gamma+c^2)}+c\right), \\ &\overset{\times}{C}\left(-\frac{\Lambda c^2}{2\Gamma}, 0\right). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Bemerkungen:

1) Eine allgemeine Kubik ist (nach [9], S. 374) durch 9 unabhängige Punkte bestimmt. Die Kubik k ist folglich durch ihre in (I) und (II) vermerkten ausgezeichneten Punkte und die Fernpunkte ihrer Asymptoten mehrfach überbestimmt. Eine allgemeine Kubik besitzt drei *reelle* und sechs paarweise konjugiert komplexe Wendepunkte. Die drei reellen Wendepunkte liegen kollinear auf der *Wendegeraden* der Kubik (siehe [5], S. 96).
2) Für gleichschenklige Dreiecke ABC (also für $\Lambda = a + b = 0$) zerfällt die Kubik k in die Symmetrieachse des Dreiecks ($\xi = 0$) und eine zur Symmetrieachse symmetrische Hyperbel mit der aus (7) folgenden Gleichung
$$a^2\xi^2 - c^2\eta^2 + (c^2 - a^2)c\eta - a^4 = 0. \tag{12}$$
Der Mittelpunkt der Hyperbel (12) ist der Umkreismittelpunkt M; ihre Asymptoten sind die von der Symmetrieachse verschiedenen Mittellote des Dreiecks ABC.
3) Im $\bar{x}\bar{y}$-Koordinatensystem (siehe (8)) lautet die Gleichung der Kubik k:
$$\begin{aligned} 4\bar{x}(c^2\bar{y}^2 - \Lambda c\bar{x}\bar{y} + \Gamma\bar{x}^2) + (\Lambda^2 - 4\Gamma)(\Lambda c\bar{y} \\ - \Gamma\bar{x}) - (\Gamma + c^2)^2\bar{x} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Diese Gleichung (in der man $c\bar{y} = \hat{y}$ setzen kann) enthält nur kubische und lineare Glieder. Gibt man (13) die Gestalt

$$\frac{4c^2\bar{y}^2 - (\Gamma + c^2)^2}{4\bar{x}^2 - (\Lambda^2 - 4\Gamma)} = \frac{\Lambda c\bar{y} - \Gamma\bar{x}}{\bar{x}} \tag{14}$$

und setzt man jede Seite dieser Gleichung gleich μ, so folgt daraus eine Parameterdarstellung der Kubik k mit μ als Parameter.

2. Problem: Ausgehend von einem beliebigen Punkt $X^*(\xi^*, \eta^*)$ findet man mit

$$U := a\eta^* + c\xi^* \qquad V := b\eta^* + c\xi^* \tag{15}$$

als Koordinaten der Projektionen P, Q, R (Abb. 1):

$$\left.\begin{array}{lll} P(x_P^*, y_P^*) & \text{mit} & x_P^* = \dfrac{-c\xi^*}{\eta^* - c}, \qquad y_P^* = 0\,^8, \\[2ex] Q(x_Q^*, y_Q^*) & \text{mit} & x_Q^* = \dfrac{U - ac}{V - ac}\, b, \quad y_Q^* = \dfrac{(b-a)c\eta^*}{V - ac}, \\[2ex] R(x_R^*, y_R^*) & \text{mit} & x_R^* = \dfrac{V - bc}{U - bc}\, a, \quad y_R^* = \dfrac{(a-b)c\eta^*}{U - bc}. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Die Gleichungen der Seitenlote l_P, l_Q, l_R lauten:

$$\left.\begin{array}{ll} l_P & (\eta^* - c)x + c\xi^* = 0, \\ l_Q & bx - cy + cy_Q^* - bx_Q^* = 0, \\ l_R & ax - cy + cy_R^* - ax_R^* = 0. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Die Seitenlote (17) sind genau dann *kopunktal*, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} \eta^* - c & 0 & c\xi^* \\ b & 1 & cy_Q^* - bx_Q^* \\ a & 1 & cy_R^* - ax_R^* \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Aus (18) folgt nach Entwicklung der Determinante bei Verwendung von (15), (16) und (6):

$$\Lambda c(\eta^{*2} - \xi^{*2}) + 2(c^2 - \Gamma)\xi^*\eta^* + \Lambda^2 c\xi^* - \Lambda(c^2 - \Gamma)\eta^* - \Lambda\Gamma c$$
$$= \frac{\xi^*[\Gamma\eta^{*2} + \Lambda c\xi^*\eta^* + c^2\xi^{*2} - (\Lambda^2 - 2\Gamma)c\eta^* - \Lambda c^2\xi^* + \Gamma c^2].}{\eta^* - c} \tag{19}$$

[8] Für $\eta^* = c$ stellt sich als Punkt P der Fernpunkt der Dreieckseite AB ein. Entsprechendes gilt für die Punkte Q und R.

Aus (19) läßt sich die Gleichung (18) zurückgewinnen, die die Kopunktalität von l_P, l_Q, l_R garantiert. Damit führt ein Punkt X^* genau dann auf kopunktale Seitenlote l_P, l_Q, l_R, wenn X^* auf der durch (19) gegebenen Kubik k^* liegt (Abb. 3).

Da sich die Gleichung (19) nach keiner der Variablen ξ^*, η^* bequem auflösen läßt, ist zur programmgesteuerten Erzeugung der Kubik k^* eine Parameterdarstellung für k^* wünschenswert. Wir schneiden dazu k^* mit den Geraden

$$\eta^* = m\xi^* + c, \quad m \in \mathbb{R} \tag{20}$$

durch die Dreiecksecke $C(0, c)$ und wählen den Anstieg m der Geraden als Parameter. Verwendet man (20) in (19), dann spaltet sich $\xi^* = 0$ (zur Festlegung der Ecke C) ab und die beiden andern Schnittpunkte einer Geraden (20) mit k^* ergeben sich aus den Lösungen $\xi^* = \xi^*(m)$ der quadratischen Gleichung:

$$[\Lambda c m^3 + (2c^2 - 3\Gamma)m^2 - 2\Lambda c m - c^2]\xi^{*2} + [\Lambda(\Gamma + c^2)m^2 + 2(\Lambda^2 - 3\Gamma + c^2)cm]\xi^* + (a-b)^2 c^2 = 0. \tag{21}$$

Damit besitzt die Kubik k^* die Parameterdarstellung

$$\xi^* = \xi^*(m), \quad \eta^* = m\xi^*(m) + c. \tag{22}$$

Die Nullstellen des Koeffizienten von ξ^{*2} in (21) liefern die Fernpunkte von k^* Wir fassen nun – analog zum 1. Problem – das erzielte Ergebnis in Satz 2, (a) zusammen und formulieren in Satz 2, (b)–(d) Eigenschaften der Kubik k^*, die sich in elementarer Weise aus (19) ermitteln lassen.

Satz 2: *Projiziert man in der projektiv erweiterten euklidischen Ebene einen Punkt $X^*(\xi^*, \eta^*)$ aus den Ecken eines Dreiecks ABC auf seine Gegenseiten und sind $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ die Projektionen von X^*, so gilt* (*Abb.* 2, 3):

(a) *Die Seitenlote l_P, l_Q, l_R des Dreiecks ABC in den Punkten $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ sind genau dann kopunktal und schneiden einander in einem Punkt X, wenn X^* auf der Kubik k^* mit der Gleichung* (19) *liegt.*

(b) *Die Tangenten von k^* in A, B, C, H'^* schneiden einander im Höhenschnittpunkt $H \in k^*$ (siehe Tabelle* (II)).

(c) *Die Kubik k^* geht durch die Punkte $A^0, B^0, C^0, M^0 = H$, die aus A, B, C, M durch Spiegelung am Schwerpunkt S und anschließende Streckung aus S um den Faktor 2 entstehen. Die*

Dreiecke ABC und $A^0B^0C^0$ *besitzen denselben Schwerpunkt S und entsprechende Seiten sind parallel* ($AB \| A^0B^0$, $BC \| B^0C^0$, $CA \| C^0A^0$). *Die Kubik* k^* *geht durch den Punkt* H' *(Spiegelpunkt von H an M und Spiegelstreckungspunkt von H an S). Die Tangenten von* k^* *in* A^0, B^0, C^0, S *schneiden einander im Punkt* $H'^* \in k^*$

(d) *Die Kubik* k^* *schneidet jede Seite des Dreiecks ABC in den Dreiecksecken (nach (I)) und in einem weiteren Punkt* $A'^* \in BC$, $B'^* \in CA$, $C'^* \in AB$. *Die Punkte* A, A'^*, H'^* *sowie* B, B'^*, H'^* *und* C, C'^*, H'^* *liegen jeweils kollinear. Die Punkte A, B, C, die Punkte* A'^*, B'^*, C'^* *und die Höhenfußpunkte* H_A, H_B, H_C *des Dreiecks ABC sind verknüpft durch:*

$$\overline{AH_C} = \overline{BC'^*}, \quad \overline{BH_A} = \overline{CA'^*}, \quad \overline{CH_B} = \overline{AB'^*} \tag{23}$$

Beweisskizzen: Um die in Satz 2 als Punkte der Kubik k^* genannten Punkte als solche nachzuweisen, berechnet man ihre Koordinaten und zeigt, daß sie die Kubikgleichung (19) erfüllen oder man führt den Nachweis elementargeometrisch. Zur Bereitstellung der Gleichungen der betrachteten Tangenten von k^* zieht man die Ableitung $\eta^{*\prime}(\xi^*)$ aus der nach ξ^* differenzierten Gleichung (19) heran. Zum Nachweis der Kopunktalität von Kubiktangenten kann man mit MAPLE zeigen, daß die jeweils (4) entsprechende Kopunktalitätsbedingung erfüllt ist.

Für die in Satz 2 auftretenden Punkte C'^* und H'^* berechnet man die Koordinaten:

$$C'^*(a+b, 0), \tag{24}$$

$$H'^*\left(\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2-ab}, \frac{c(c^2+ab)}{a^2+b^2+c^2-ab}\right) \tag{25}$$

Die Koordinaten ξ_{T^*}, η_{T^*} des Punktes $T^* \in k^*$ in Abb. 3 lauten:

$$\xi_{T^*} = \frac{1}{n}\eta_{T^*} + \Lambda, \tag{26}$$

$$\eta_{T}* = -\frac{\Lambda c^2 + 2cn(\Lambda^2 + c^2) + 2\Lambda\Gamma n^2}{c^2 + 2\Lambda cn + (3\Gamma - 2c^2)n^2 - \Lambda cn^3} \; n; \tag{27}$$

dabei bezeichnet n die aus (19) zu berechnende Ableitung $\eta^{*\prime}$ der Kubik k^* im Punkt $C'^* \in k^*$

Bemerkungen:

1) In Abb. 3 erkennt man bei den Kubiken k und k^* die ungefähre Lage der drei reellen Wendepunkte und der zugehörigen

Wendegeraden. Die Kubiken k und k^* besitzen nach dem Satz von Bézout in algebraischer Zählung 9 Schnittpunkte, die in Abb. 3 alle reell sind. Es handelt sich um die Punkte A, B, C, H, H' und um je einen Schnittpunkt nahe bei A, B, C und $\overset{\times\prime}{A}$

2) Die drei Fernpunkte der Kubik k^* lassen sich aus den Nullstellen des Polynoms 3. Ordnung in m berechnen, das in (21) als Koeffizient von ξ^{*2} auftritt. Die Nullstellen lassen sich mit Hilfe der Cardanischen Formeln angeben; sodann lassen sich die Fernpunkte und die Asymptoten von k^* bestimmen. Wegen der komplizierten Bauart der Cardanischen Formeln liefert dieser Weg kaum einen Hinweis darauf, wie sich die Asymptoten von k^* konstruktiv auf das gegebene Dreieck ABC zurückführen lassen. Für spezielle Dreiecke (etwa für $c^2 = 2ab$) findet man die Fernpunkte von k^* elementar.

3) Für gleichschenklige Dreiecke ABC (also für $\Lambda = a + b = 0$) zerfällt die Kubik k^* in die Symmetrieachse des Dreiecks ($\xi^* = 0$) und eine zur Symmetrieachse symmetrische Hyperbel mit der aus (19) folgenden Gleichung

$$(2c^2 + 3b^2)\eta^{*2} - 2c^3\eta^* - c^2\eta^{*2} + b^2c^2 = 0. \tag{28}$$

4) Beim 1. Problem fordert man die Kopunktalität der Geraden AQ, BR, CP. Sind diese Geraden *nicht* kopunktal, dann kann man die Schnittpunkte

$$X_C^* := AQ \cap BR, \quad X_A^* := BR \cap CP, \quad X_B^* := CP \cap AQ \tag{29}$$

und die drei Abbildungen $X \mapsto X_A^*, X \mapsto X_B^*, X \mapsto X_C^*$ betrachten. Es handelt sich dabei um drei birationale quadratische Verwandtschaften, die jeweils die Kubik k auf die Kubik k^* abbilden. Entsprechendes gilt beim 2. Problem.

5) Man darf erwarten, daß sich weitere aus einem Dreieck ABC ableitbare Punkte als Punkte der Kubiken k und k^* erweisen und daß weitere Aussagen über Kubiken nach dem in (II), Satz 1 und Satz 2 vorgeführten Muster zu neuen Aussagen führen.

6) Die in Abb. 3 dargestellten Kubiken k und k^* bestehen aus zwei Ästen. Der jeweils (*unpaare*) Ast läuft durch A und ist über seinen Fernpunkt geschlossen. Er wird von allen Geraden der Ebene in einem oder in drei Punkten geschnitten. Der jeweils andere (*paare*) Ast läuft durch B und C und ist über seine zwei Fernpunkte geschlossen. Er wird von allen Geraden der Ebene in zwei Punkten oder in keinem Punkt geschnitten. Von den Punkten des unpaaren Astes lassen sich 4 reelle anderswo

berührende Tangenten an die Kubik legen, zwei an den unpaaren und zwei an den paaren Ast; von den Punkten des paaren Astes läßt sich keine anderswo berührende Tangente an die Kubik legen. Siehe etwa [9], S. 389.

Nachtrag in der Korrektur

G. M. Pinkernell untersucht in *Cubic curves in the triangle plane* (J. Geom. 55 (1996), 141–161) zwei mit einem Dreieck verknüpfte Kubikscharen. Die eine Schar enthält die als *Darboux–Kubik* bezeichnete Kubik k, die andere Schar enthält die als *Lukas–Kubik* bezeichnete Kubik k^*

Literatur

[1] Berkhan, G., Meyer, W. Fr.: Neuere Dreiecksgeometrie. In: Enzykl. d. math. Wiss., Bd. III, 1.Teil, 2.Hälfte, 10.III.34. Leipzig: B.G. Teubner (1914–1931).

[2] Coxeter, H.S.M., Greitzer, S.L.: Zeitlose Geometrie, Stuttgart; E. Klett 1983.

[3] Cremona, L.: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven. Greifswald; C.A. Kochs Verlagsbuchhandlung, Th. Kunike 1865.

[4] Donath, E.: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976.

[5] Fladt, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Frankfurt a.M.: Akad. Verlagsges. 1962.

[6] Giering, O.: Affine and projective generalization of Wallace lines. J. Geom. Graph. **1**, 119–133 (1997).

[7] Giering, O.: Seitenstücke der Wallace-Geraden. Österr. Akad. Wiss., Sitzungsber. Abt. II **207**, 199–211 (1998).

[8] Naas, J., Schmid, H.L.: Mathematisches Wörterbuch, Bd.II. Berlin; Akademie-Verlag und Stuttgart; B.G. Teubner 1972.

[9] Pascal, E.: Repertorium der höheren Mathematik. Bd. 2: Geometrie, 1.Hälfte, Grundlagen und ebene Geometrie. 2.Aufl. Leipzig u. Berlin; B.G. Teubner 1910.

[10] Simon, M.: Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig; B.G. Teubner 1906.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. O. Giering, Zentrum Mathematik, TU München, D-80290 München.